INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

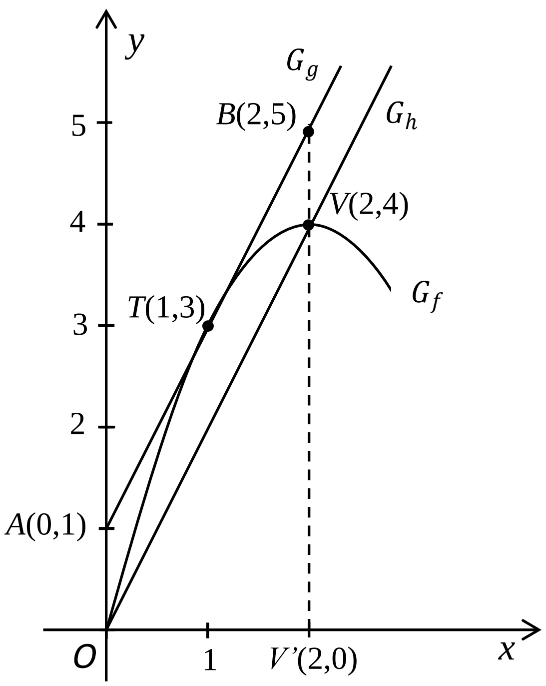
CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

PROFIL TEHNIC
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A IX-A

1. a) $x_1, x_2 \in \mathbf{R} \Longrightarrow \Delta \geq 0$.. 1p
   $\Delta = 4(-m^2 - 6m + 1)$
   $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-3-\sqrt{10}, -3+\sqrt{10}$...1p
   b) $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 2$............................ 1p
   $(m+1)^2 - (m^2+4m) + 2(m+1) + 2 = 5, \forall m \in \mathbf{R}$.. 1p
   c) $(x_1-1)^2 = 4$ și $(x_2-1)^2 = 1$ (sau invers).. 1p
   $\{x_1, x_2\}$: $\{3,2\}$; $\{3,0\}$; $\{-1,2\}$; $\{-1,0\}$... 1p
   $m \in \{-6, -4, -2, 0\}$.. 1p
2. a)



....1p

x	0		2
$f(x)$	0	↗	4

x	0		2
$g(x)$	1	↗	5

x	0		2
$h(x)$	0	↗	4

.... 1p

b) Necesitatea.
$x = 2 \Longrightarrow h(2) \leq f(2) \Longrightarrow a \leq 2$ 1p
$x = 1 \Longrightarrow g(1) \geq f(1) \Longrightarrow a \geq 2$, deci $a = 2$ 1p
Suficienta
$h(x) \leq f(x) \Leftrightarrow 2x \leq -x^2 + 4x \Leftrightarrow x(2 - x) \geq 0$ (Adevărat) 1p
$g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow 2x + 1 \geq -x^2 + 4x \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ (Adevărat) 1p

c) Avem $A < A_{\text{trapez } AOV'B} = 6$și$A > A_{\Delta OV'V} = 4$, deci $A \in (4,6)$ 1p

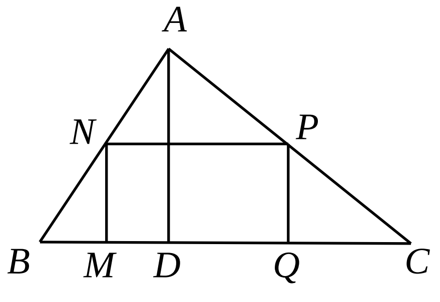
3. a) $61 = 1 + 2 \cdot 30$, deci 61 a fost șters 1p
$73 = 1 + 3 \cdot 24$, deci 73 a fost șters 1p

b) Numerele șterse prima dată sunt:
$1 + 2(n - 1), n \in \{1,2, \dots ,49,50\}$ 1p

Numerele șterse a doua oară sunt:
$1 + 3(m - 1), m \in \{1,2, \dots ,34\}$ 1p
Numerele care se repetă:
$1 + 2(n - 1) = 1 + 3(m - 1) \Longrightarrow n - 1 = 3p$ 1p
Deci numerele care se repetă sunt:
$1 + 6p,\ p \in \{0,1, \dots ,16\}$ 1p
Suma numerelor rămase
$S = \frac{(1+100)\cdot 100}{2} - \frac{(1+99)\cdot 50}{2} - \frac{(1+100)\cdot 34}{2} + \frac{(1+97)\cdot 17}{2} = 1666$ 1p

4. a) $A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84\text{dm}^2$ 1p

b)



$\frac{MN}{AD} = \frac{BN}{AB}$și$\frac{NP}{BC} = \frac{AN}{AB}$ 1p
$\frac{MN}{\frac{56}{5}} + \frac{NP}{15} = 1$ 1p
Notăm $MN = x$ și deci $NP = \frac{15}{56}(56 - 5x)$ 1p

c) $A_{MNPQ} = \frac{15}{56}(56x - 5x^2)$ este maximă pentru $x = \frac{28}{5}$ 1p
$A_{MNPQ} = 42\ \text{dm}^2 = 50\%$ din A_{ABC} 1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

PROFIL TEHNIC
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A X-A

1. a) Obține $n * n^3 = \log_n n^3 + \log_{n^3} n = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ 2p

   b) Obține $x * \frac{1}{y} = \log_x \frac{1}{y} + \log_{\frac{1}{y}} x = -\log_x y - \log_y x$ 1p

   Obține $\frac{1}{x} * y = \log_{\frac{1}{x}} y + \log_y \frac{1}{x} = -\log_x y - \log_y x$ și finalizare 1p

   c) Obține $a^x * b - a * b^x = \log_{a^x} b + \log_b a^x - \log_a b^x - \log_{b^x} a =$
   $= \left(x - \frac{1}{x}\right)(\log_b a - \log_a b)$ 1p

   Obține cazurile $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ sau $\log_a b = \log_b a$... 1p

   Finalizare: $x \in \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$, pentru $a \neq b$ sau $x \in \mathbf{R}^*$, pentru $a = b$. 1p

2. a) Deoarece $f(n) - nf(n-1) = n$, rezultă că $f(n) \geq n$ 1p

   Obține $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \geq 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 2p

   b) Verifică $(n+1) \cdot A_n^k = (n+1)\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!} = A_{n+1}^{k+1}$ 1p

   c) Etapa de verificare $P(1): f(1) = A_1^1$ – adevărată 1p

   Presupunem $P(n): f(n) = A_n^1 + A_n^2 + A_n^3 + \cdots + A_n^n$ – adevărată și demonstrăm că $P(n+1): f(n+1) = A_{n+1}^1 + A_{n+1}^2 + A_{n+1}^3 + \cdots + A_{n+1}^{n+1}$ este adevărată.

   $$f(n+1) = (1+n)\big(1 + f(n)\big) = (1+n)(1 + A_n^1 + A_n^2 + A_n^3 + \cdots + A_n^n) \overset{[b]}{=}$$
   $= A_{n+1}^1 + A_{n+1}^2 + A_{n+1}^3 + \cdots + A_{n+1}^{n+1}$ 2p

3. a) Obține numărul punctelor de penalizare $2700 : 75 = 36$ 2p

   b) Notăm cu x – numărul conducătorilor auto fără puncte de penalizare primite,
   y – numărul conducătorilor auto cu 2 puncte de penalizare primite,
   z – numărul conducătorilor auto cu 5 puncte de penalizare primite.

   Scrie $\begin{cases} x + y + z = 25 \\ 2y + 5z = 36 \end{cases}$ 1p

   Din $x \geq 13$și $x + y + z = 25 \Longrightarrow y + z \leq 12$ 1p

   Din $36 = 2y + 5z \Longrightarrow 36 = 2(y+z) + 3z \leq 24 + 3z \Longrightarrow z \geq 4$, z – par 1p

   Pentru$z = 4 \Longrightarrow y = 8$și $x = 13$, iar pentru $z = 6 \Longrightarrow y = 3$ și $x = 16$ 1p

   $z \geq 8$nuconvine, decinumărul maxim al conducătorilor auto care auprimit 5 puncte de penalizareeste 6. .... 1p

4. Constatămcă$P_0 = 35000$, $P(2) = 42000$ și se cere $P(4)$ 2p

   Din $P(2) = 42000 = 35000 \cdot 2^{2k}$, obține$2^{2k} = 1{,}2$ 1p

   Folosindvalorileaproximative indicate deduce $2^{2k} = 1{,}2 = \sqrt[4]{2}$, deci$k = \frac{1}{8}$........ 2p

   Obțineestimarea$P(4) = P_0 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 35000 \cdot 1{,}4 = 49000$ euro 2p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

PROFIL TEHNIC
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XI-A

1. a) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1$ 1p

   b) $\Delta\neq 0 \Rightarrow$ sistem Cramer cu $x(a)=\frac{\Delta_x}{\Delta}; y(a)=\frac{\Delta_y}{\Delta}; z(a)=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ 1p

   $\Delta_x=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\2^a & 1 & 1\\4^a & 1 & 2\end{vmatrix}=1-2^a$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2^a & 1\\1 & 4^a & 2\end{vmatrix}=-4^a+3\cdot 2^a-1$,
   $\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2^a\\1 & 1 & 4^a\end{vmatrix}=4^a-2^a$,

   $\big(x(a),y(a),z(a)\big)=(1-2^a,-4^a+3\cdot 2^a-1,4^a-2^a)$, $a\in\mathbf{R}$ 3p

   c) $y(a)>1 \Leftrightarrow -4^a+3\cdot 2^a-2>0 \Leftrightarrow 4^a-3\cdot 2^a+2<0$
   Notăm 2^a cu $t \Rightarrow t^2-3t+2<0 \Rightarrow t\in(1,2)$ 1p
   $1<2^a<2 \Leftrightarrow 0<a<1 \Leftrightarrow a\in(0,1)$ 1p

2. a) $f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)$; $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ 1p
   f' continuă pe $(0,1)$ și pe $(1,+\infty) \Rightarrow f'(x)>0$, $\forall x\in(0,1)$ și
   $f'(x)<0, \forall x\in(1,+\infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$și
   f strict descrescătoare pe $[1,+\infty)$ 3p

   b) Din a) $\Rightarrow f_{\max}=f(1)=1-\alpha \Rightarrow f(x)\le 1-\alpha$, $\forall x>0$
   $\Leftrightarrow x^\alpha\le \alpha x+1-\alpha$, $\forall x>0$ 1p

   c) Prin transformări succesive avem:
   $$a^\alpha b^\beta\le \alpha a+\beta b \Leftrightarrow a^\alpha b^{1-\alpha}\le \alpha a+(1-\alpha)b \Leftrightarrow$$
   $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\cdot b\le b\left(\alpha\frac{a}{b}+1-\alpha\right) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha\le \alpha\frac{a}{b}+1-\alpha$, pentru $b>0$.
   Ultimainegalitate se obține din b) pentru $x=\frac{a}{b}$ 2p
   Sau: În inegalitatea de la b) punem $x=\frac{a}{b}$ și obținem inegalitatea cerută.

3. a) Considerăm funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=4x^2-1 \Rightarrow (d)$ este tangentă la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\frac{1}{8} \Rightarrow$ panta dreptei (d) este $f'\left(\frac{1}{8}\right)=\operatorname{tg}\alpha$, unde αeste unghiul pe care îl face dreapta cu (Ox)
   $f'(x)=8x \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$ 2p

   b) Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\frac{1}{8}$este
   $y-f\left(\frac{1}{8}\right)=f'\left(\frac{1}{8}\right)\left(x-\frac{1}{8}\right)$........ 1p
   $\Rightarrow (d): y=x-\frac{17}{16}$ 1p
   $d\cap(0x)=\left\{M\left(\frac{17}{16},0\right)\right\}$, $d\cap(0y)=\left\{N\left(0,-\frac{17}{16}\right)\right\}$ 1p
   ΔMNOeste dreptunghic isoscel și are aria egală cu

$A_{\Delta MNO} = \frac{(\text{cateta })^2}{2} \Longrightarrow A_{\Delta MNO} = \frac{OM^2}{2} = \frac{\left(\frac{17}{16}\right)^2}{2} \Longrightarrow A_{\Delta MNO} = \frac{289}{512}$ 2p

4. $\det(M^2) = (detM)^2 = (a_3a_5 + a_1a_2a_4)^2$ 2p
   Andrei câștigăjocul, oricarear fi alegerilefăcute de Bogdan, dacă$\det(M^2)$
   nudepinde de a_2șia_4 .... 1p
   $\Longrightarrow a_1 = 0 \Longrightarrow (a_3a_5)^2 = 1 \Longrightarrow a_3a_5 \in \{-1,1\}$ 2p
   $a_3, a_5 \in \mathbf{Z} \Longrightarrow (a_1, a_3, a_5) \in \{(0,1,1),\ (0,-1,-1),\ (0,1,-1),\ (0,-1,1)\}$ 2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
13 aprilie 2014

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

PROFIL TEHNIC
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA A XII-A

1. a) $g = 0$ are rădăcinile $y_1 = 1$, $y_2 = \mathrm{i}$, $y_3 = -\mathrm{i}$ 1p
   Rezultă: $y_1^{2014} + y_2^{2014} + y_3^{2014} = 1 + (i^2)^{1007} + (i^2)^{1007} = -1$ 1p
   b) $f = xg + 1$ (verificare prin calcul direct) 1p
   Rezultă: $0 = x_k g(x_k) + 1, \forall k = \overline{1,4} \Longrightarrow g(x_k) = -\frac{1}{x_k}$ 2p
   Avem: $g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4) = \frac{1}{x_1x_2x_3x_4} = 1 \in N$ 1p
   c) $f(y_1) + f(y_2) + f(y_3) = y_1 g(y_1) + y_2 g(y_2) + y_3 g(y_3) + 3 = 3$,
   deoarece $g(y_1) = g(y_2) = g(y_3) = 0$ 1p

2. a) Folosește faptul că dacă $f: [-a, a] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă, atunci
   $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$, dacă f este o funcție impară. Așadar $I = 0$ 3p
   Sau: Integrează succesiv prin părți:
   $$I = x^3 \sin x \,\Big|_{-\pi}^{\pi} - 3\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\, dx = 3\left[x^2 \cos x \,\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x\, dx\right] =$$
   $$= 6\left[-x \sin x \,\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx\right] = -6 \cos x \,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$
   .... 3p
   b) Integrează succesiv prin părți și obține:
   $F(x) = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C$ 2p
   c) $\log_{x\to\infty} \frac{F(x)}{x^4} = 0$ (cu justificare) 2p

3. i) $c * c \overset{[2]}{=} (a * b) * (a * b) \overset{[1]}{=} a * b = c$ 3p
   ii) $a * z \overset{[1]}{=} (a * b) * (z * z) \overset{[2]}{=} c * (z * z) \overset{[i]}{=} (c * c) * (z * z) \overset{[1]}{=} c * z$ 4p

4. a) $(8,17,3,107) \to (9,14,104,99) \to (5,90,5,90) \to (85,85,85,85) \to (0,0,0,0)$ 2p
   b) $(5,7,11,19) \to (2,4,8,14) \to (2,4,6,12) \to (2,2,6,10) \to (0,4,4,8) \to$
   $\to (4,0,4,8) \to (4,4,4,4) \to (0,0,0,0)$ 3p
   c) $(n, n, 1 - 4n, n) \to (0{,}5n - 1{,}5n - 1{,}0) \to (5n - 1{,}0{,}5n - 1{,}0) \to$
   $\to (5n - 1{,}5n - 1{,}5n - 1{,}5n - 1) \to (0,0,0,0)$ 2p